Versuch, das Weltgeheimnis etwas zu verstehen

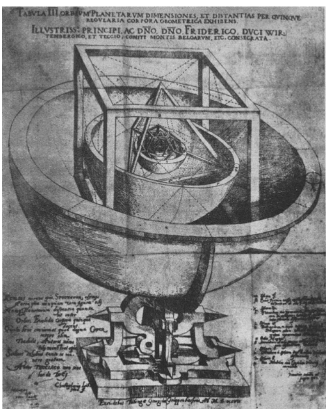
Franz Krojer, München 2022

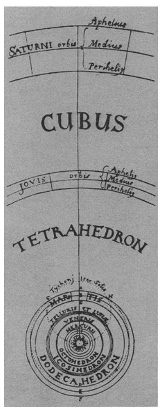
Founders come first, then profiteers.
(John Adams, Nixon in China)

Keplers Bücher, die Hauptwerke, wirken monströs, unverständlich, nichtssagend. Bestenfalls könnte man sagen, sie wirken wie eine sinfonische Partitur auf einen, der keine Noten lesen kann. Das ist vielleicht sogar eine (ungewollt) treffende Formulierung.

Es war schon ein besonders genialer Trick, in seinem ersten großen Werk von 1596 (Mysterium Cosmographicum) das kopernikanische Weltsystem aus den fünf platonischen Körpern logisch ableiten zu können bzw. als Plan Gottes darzustellen. Aber es durften dann halt keine weiteren Planeten mehr entdeckt werden. Spätestens mit der Entdeckung des Uranus 1781 ging dieser Plan aber nicht mehr auf, und so steht denn zu diesem Opus in Wikipedia (Stand März 2022) ein „nur noch von historischem Interesse." Die „Titius-Bode-Reihe" ersetzte dann die Keplersche Spekulation.

Was vom „Weltgeheimnis" aber unbedingt bestehen bleibt und vermutlich zum „kulturellen Gedächtnis" der Menschheit zählt, ist diese Abbildung im „Weltgeheimnis":





Weltgeheimnis

Dazu erläutert Jürgen Hamel in „Johannes Kepler und die Idee des Friedens, Wissenschaft und Fortschritt 1/1982, S. 8“:
„In seinem Buch ‚Mysterium cosmographicum‘ (1596) versuchte Kepler, die Bahnen der Planeten auf der Grundlage von Copernicus mit Hilfe der fünf regelmäßigen Polyeder (Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Tetraeder und Würfel) zu konstruieren (links). Die Bahnen der Planeten sind in seinem Modell so angeordnet, daß die Sphären mit dem Durchmesser der Bahn der entsprechenden Planeten jeweils einem dieser Körper einbeschrieben sind und dabei einen anderen umgrenzen. In ‚Harmonices Mundi‘ (1619) wiederholte er dieses Modell in ebener Darstellung (rechts).“ (Jürgen Hamel: Johannes Kepler und die Idee des Friedens, Wissenschaft und Fortschritt 1/1982, S. 8.[1]

Dieses Gebilde könnte auch von einem M. C. Escher geschaffen worden sein? Genau, Escher! Und schon lese ich:

„Die platonischen Körper sind alle konvex. Kepler und Poinsot entdeckten noch vier weitere, konkave, regelmäßige Körper. Wenn man *verschiedene* (regelmäßige) Polyeder als Begrenzung eines regelmäßigen Körpers annimmt, dann gibt es 26 weitere Möglichkeiten (die Archimedischen Körper). Schließlich können wir verschiedene regelmäßige Körper, die einander durchdringen, als neue regelmäßige Körper auffassen; man bekommt dann eine schier endlose Reihe neuer zusammengesetzter regelmäßiger Körper. Wir gehen damit weit über das hinaus, was die Natur in Kristallen an Formen verwirklicht hat. Von den platonischen Körpern erscheinen nur Tetraeder, Oktaeder und der Kubus als natürliche Kristalle und außerdem nur eine kleine Zahl der anderen möglichen Polyeder. Die menschliche Phantasie ist in diesem Punkte augenscheinlich reicher als die Natur.
All diese räumlichen Figuren faszinierten und beschäftigten Escher: Wir begegnen ihnen in seinen Bildern wieder, zuweilen als Hauptthema wie 1947 in *Kristall,* 1948 in *Sterne,* 1949 in *Doppelplanetoid,* 1 950 in *Ordnung und Chaos,* 1952 in *Schwerkraft* und 1954 in *Vielflächenplanetoid* und manchmal als Dekoration, wie in *Wasserfall* (1961), wo regelmäßige Körper die zwei Türme bekrönen.

[1] Lies auch Michael Weichenhan: Geometrisches Modell der Welt vs. die Welt als Bild – Johannes Kepler und Robert Fludd, in Markschies/Zachhuber: Die Welt als Bild: interdisziplinäre Beiträge zur Visualität von Weltbildern, Berlin 2008.

Escher hat auch einige regelmäßige Körper aus Holz und Plexiglas gemacht – nicht als Modell, um danach zu zeichnen, sondern als selbständige Kunstwerke.“[2]
Wir sprachen über das Kunstwerk in Keplers „Weltgeheimnis“, und kaum verändern wir unsern Standpunkt etwas, übersehen wir – mathematische Landschaften. Aus dem Astronomen wird ein Mathermatiker und theoretischer Physiker. Nebenbei gesagt, nur in dieser Rolle konnte Kepler auch die Ellipsenform der Planetenbahnen entdecken, ein Tycho Brahe, so kann man unterstellen, hätte das nicht geschafft.

Mit dieser Einsicht wird Kepler zwar nicht leichter lesbar, aber man versteht nun sein Vorgehen besser und seine vielen Abschweifungen, die man vielleicht als immerwährende mathematische Erkundigungen bezeichnen könnte. Kepler ist so zu einem Impulsgeber geworden für Probleme der Mathematik und der theoretischen Physik bis in unsere Zeit.

Und so bin ich *z.B.* bei diesem Buch angekommen:
George G. Szpiro: Die Keplersche Vermutung. Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten, Berlin/Heidelberg 2011. („Die englische Originalausgabe erschien 2003 unter dem Titel Kepler's Conjecture“.)

Wir kennen ihn wenigstens vom Namen her: Sir Walter Raleigh, die Seefahrer-Legende, und also Rüstungsgrundlagenforschung:
„Irgendwann gegen Ende der 1590er Jahre, als Raleigh seine Schiffe für eine weitere Entdeckungsreise ausrüstete, bat er seinen besten Freund und mathematischen Assistenten Thomas Harriot um einen Gefallen. Harriot solle eine Formel aufstellen, mit deren Hilfe Raleigh die Anzahl der Kanonenkugeln in einem gegebenen Stapel einfach anhand der Form des Stapels ermitteln konnte. Harriot war auf Draht und löste das Problem, das ihm Raleigh gestellt hatte. Wie jeder gute Assistent verstand Harriot die Bedürfnisse seines Meisters, entwickelte sie einen Schritt weiter und versuchte, die effizienteste Möglichkeit zu finden, so viele Kanonenkugeln wie möglich in den Laderaum eines

[2] Bruno Ernst: Der Zauberspiegel des Maurits Comelis Escher, Köln 1994 (1978), S. 95.

Schiffes zu stopfen. Auf diese Weise erblickte ein mathematisches Problem das Licht der Welt.“ (S. 1)[3]
„Im modernen mathematischen Sprachgebrauch ausgedrückt, fragte er sich, wie man dreidimensionale Kugeln so dicht wie möglich packen kann. Nachdem Harriot eine Weile über diese Frage nachgedacht hatte, beschloß er, einen Brief an Kepler zu schreiben, seinen Kollegen in Prag, der einer der führenden Mathematiker, Physiker und Astronomen der damaligen Zeit war.“ (S. 2)
„Nach Erhalt des Briefes von Harriot mußte Kepler nicht lange nachdenken, um zu dem Schluß zu kommen, daß man die dichtestmögliche Packung dreidimensionaler Kugeln dadurch erreicht, daß man sie so anordnet wie die Marktverkäufer ihre Äpfel, Orangen und Melonen stapeln. Kepler veröffentlichte 1611 eine kleine Broschüre, die er seinem Freund Johann Matthäus Wacker von Wackenfels als Neujahrsgeschenk überreichte. Das Büchlein hieß *Vom sechseckigen Schnee* und Kepler beschrieb darin eine Methode, Kugeln so dicht wie möglich zu packen. Das war die Geburt der Keplerschen Vermutung.“ (S. 5)

Ich würde gerne aus Keplers Schrift ein charakterisierendes Zitat angeben (vor mir liegt die deutsche Übersetzung „Über den hexagonalen Schnee“ von Strunz und Born, Regensburg 1958), aber das Gemeine ist, dass dieses „Problem der dichtesten Kugelpackung“ („Close-packing of equal spheres“) von Kepler nur nebenbei/fließend behandelt wird, gleichsam als eine Metamorphose/Hervorbringung des Schnees durch „facultas formatrix“[4], wie sich in dieser kompakten Inhaltsübersicht auch zeigt:

„Unterdessen war eine kleine, launige Schrift erschienen, die Kepler möglicherweise bereits im Winter 1609/10 verfaßt hat: *Strena seu de nive sexangula (Neujahrsgabe oder Vom sechseckigen Schnee,* Frankfurt a. M. 1611). In dieser seinem Freund und Gönner, dem Hofrat Wacker von Wackenfels, gewid-

---

[3] Zu Thomas Harriot lies John North: Viewegs Geschichte der Astronomie und Kosmologie, Braunschweig/Wiesbaden 1997, v.a. S. 221 f. Und weiter Johannes A. Lohne: Kepler und Harriot. Ihre Wege zum Brechungsgesetz, in Krafft/Meyer/Sticker: Internationales Kepler-Symposium Weil der Stadt 1971, Hildesheim 1973.
[4] Lies z.B. Karin Hartbecke: Metaphysik und Naturphilosophie im 17. Jahrhundert, Francis Glissons Substanztheorien in ihrem ideengeschichtlichen Kontext, Tübingen 2006.

meten Schrift äußerte sich Kepler zu einem seiner Lieblingsthemen – den geometrischen Grundformen der Schöpfung. Die Schneeflocke – lateinisch ‚nix' –, dieses ‚Nichts', nimmt Kepler zum Ausgangspunkt seiner Untersuchung. Von der Schneeflocke kommt er über die Bienenwaben zu den Granatapfelkernen, zu der Fünfzahl der Blütenblätter, darüber zu den platonischen und schließlich zu den archimedischen Körpern. Kepler macht sich angelegentlich Gedanken über die räumliche Packungsordnung von Kugeln, Waben und anderen geometrischen Körpern, um endlich wieder auf die Schneeflocken zurückzukommen."[5]

Der mathematische Beweis der „Keplerschen Vermutung" („Kepler[`s] conjecture") stellte sich als deutlich schwieriger und langwieriger heraus, als es zunächst den Anschein haben mochte. In David Hilberts Jahrhundertrede „Mathematische Probleme" (Paris 1900) ist dieses Problem unter „18. Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern" ausdrücklich genannt: „Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeter mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung) im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daß das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nichterfüllten Raume möglichst groß ausfällt."

Seit den 1990er-Jahren liegt nun ein mit massiver Computerunterstützung erzielter Beweis durch Thomas C. Hales und Samuel P. Ferguson vor, der auch seine eigene, lange Geschichte hat (und einen Konkurrenten, Wu-Yi Hsiang):

„Unterdessen schrieb man das Jahr 2004. Auch sechs Jahre nach dem Erscheinen des Beweises war die Debatte, wie und wo er veröffentlicht werden soll, nicht geklärt. Der Beweis der Keplerschen Vermutung war drauf und dran, zu einem Dauerbrenner zu werden. Schließlich beschlossen die Heraus-

---

[5] Mechthild Lembke: Johannes Kepler, Hamburg 1995, S. 83. Kurzweilig zu lesen ist Albrecht Beutelsbacher: Mathematik für die Westentasche, München 2001, mit den Kapiteln: „Fünfeck", „Platonische Körper", „Fußball", „Kreise"; „Kugelpackungen", „Bienenwaben". Dann speziell Hermann Steinmetz: Bemerkungen zu: Johannes Kepler, Strena seu de nive sexangula, in: Kepler-Festschrift, Regensburg 1930. Siehe Kepler: Gesammelte Werke IV, München 1941, lateinischer Text und „Nachbericht".

geber dennoch, den Beweis zu publizieren. Allerdings sollte er mit einem Vermerk versehen werden, in dem auf die Problematik von Computerbeweisen hingewiesen würde. …
Daß sein Beweis mit einem Warnschild versehen wurde – ‚Benutzung auf eigene Gefahr!' –, ließ ihn (Hales) nicht ruhen. 2004 startete er ein Projekt, mit dem seinem Beweis doch noch ein Gütesiegel verliehen werden sollte. In dem von ihm ‚Flyspeck' (oder FPK, Formal Proof of Kepler) getauften Projekt sollte mit Hilfe von Computern jeder einzelne Schritt seines Beweises kontrolliert werden. Keine Vorbildung der Referees wird vorausgesetzt, keine Annahmen werden gemacht. Die Computer sollen automatisch und ohne menschliches Eingreifen jede einzelne Behauptung und jede noch so triviale Folgerung auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfen. Erst wenn es keine einzige Lücke mehr gibt, wird Hales' Beweis der Keplerschen Vermutung als korrekt gelten." (Szpiro S. 255)

„Es ist überaus mühsam, eine Aussage und ihren Beweis so zu formalisieren, dass eine eigens dafür geschriebene Software, ein ‚Beweisassistent', jeden einzelnen gedanklichen Schritt auf gewisse Grundaxiome zurückführen und damit verifizieren kann. Aber es verschafft dem ganzen Werk, sei es für Menschen durchschaubar oder auch nicht, den ersehnten Nachweis der Korrektheit. In diesem Fall dauerte es mehr als ein Jahrzehnt: Erst am 14. August 2014 meldete das Projekt Flyspeck (‚Fliegenschiss') Vollzug."[6]

Seit wann wird die Keplersche Vermutung eigentlich als „Keplersche Vermutung" bzw. „Kepler conjecture" bezeichnet? Szpiro schreibt auf Seite 30, Fußnote 14: „Offensichtlich hatte Harriot die Keplersche Vermutung ein paar Jahre vorweggenommen und sie hätte mit mindestens der gleichen Berechtigung auch Harriots Vermutung genannt werden können." Und auch Giordano Bruno (S. 34) und Albrecht Dürer (S. 39 f.) werden von Szpiro als Vorläufer und Impulsgeber für Johannes Kepler genannt. In der älteren Literatur, siehe z.B. auch die Rede Hilberts, ist von einer „Keplerschen Vermutung" noch keine Rede, soweit ich das überblicken kann.

Zwar wurde über und von Kepler viel vermutet, d.h. in Google-Books findet man einiges zu „Kepler", „Vermutung", „conjecture" usw., aber alle meine

---

[6] Christoph Pöppe: Hilbert und Isabelle (Mathematische Unterhaltungen), Spektrum der Wissenschaft 3/2019, S. 66.

Suchanfragen im Kontext „Kugelpackungen“ zerstreuten sich in den 1990er-Jahren, so dass ich vermute, dass erst seitdem die Benenung nach Kepler erfolgt ist.

Ich habe mir deswegen mehrere Aufsätze und Bücher zu dieser Frage durchgesehen, die meinen Verdacht nur verstärken. In dem Aufsatz von Thomas C. Hales „The sphere packing problem“ (Journal of Computational and Applied Mathematics 44 (1992), „Received 14 March 1991“) wird Kepler noch nicht einmal namentlich erwähnt.

In dem Aufsatz von Thomas C. Hales „The Status of the Kepler Conjecture“ (The Mathematical Intelligence Vol. 16, No. 3, 1994) habe ich als früheste, mir bisher bekannt gewordene Referenz gefunden:
„6. W.-Y. Hsiang, On the density of sphere packings in E^3, II – The proof of Kepler's conjecture, Center for Pure and Appl. Math. University of California, Berkeley, preprint PAM-535, September, 1991.“

Es gab damals einige „Preprints“, den hier genannten habe ich nicht auffinden können, vielleicht gäbe es dort noch eine etwas frühere Referenz zu „Kepler“.

Dass aber erst ab ca. 1990 die Bezeichnung „Kepler conjecture“ aufkam, lässt sich jedoch auch aus diesem Aufsatz vermuten:
Barry Cipra: Music of the Spheres, Science, 1 Mar 1991, Vol 251, Issue 4997, p. 1028.

Einleitend schreibt Cipra: „It took Wu-Yi Hsiang 100 pages to show how three-dimensional space can best be filled with spheres – thereby proving what Johannes Kepler didn’t bother to“. Kepler und seine Schrift von 1611 werden zwar in dem Aufsatz genannt, aber es fehlt noch jede Spur von einer „Kepler conjecture“.

Und dennoch, genau bei Szpiro bin ich auf so eine heiße Spur gestoßen, auf eine deutlich frühere Datierung (S. 141):
„Zurück zu [Claude Ambrose] Rogers! Er widmete einen großen Teil seiner wissenschaftlichen Laufbahn der Keplerschen Vermutung und damit zusammenhängenden Problemen. Sein 1964 veröffentlichtes Buch *Packing and Covering* faßt den damaligen Wissensstand zusammen. In einer Arbeit, die er 1958 publizierte, finden wir ein Zitat, das unter Packungsexperten berühmt

geworden ist: ‚Viele Mathematiker glauben und alle Physiker wissen, daß die Kepler-Vermutung wahr ist.‘ Dieses Zitat drückt in einer Nußschale die Frustration aus, welche die Mathematiker angesichts der Lage der Dinge empfanden.“

Ein geflügeltes Wort aus dem Jahre 1958! Der Aufsatz von C. A. Rogers lautet: The Packing of Equal Spheres („Received 19 December 1957“ / Proc. London Math. Soc. (3) 8 (1958)). Ich finde die Stelle:

610 C. A. ROGERS

While many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0{\cdot}7404\ldots,$$

the best properly established bound known seems to have been the bound

$$0{\cdot}828\ldots$$

obtained by Rankin.†

Von Kepler doch keine Spur! Ich kaufe mir das Szpiro-Buch im englischen Original (Kindle-Version), und das Zitat lautet:

„Back to Rogers. A large part of his career was devoted to Kepler’s conjecture and related problems. His book Packing and Covering, published in 1964, summed up the current state of the art. In his 1958 paper we find a quote that has become famous among packing experts: ‚Many mathematicians believe, and all physicists know‘ that Kepler’s conjecture is true. His quote expresses in a nutshell the frustration the mathematical community felt at the state of affairs.“

Der Zitatfehler hat sich also erst in die deutsche Übersetzung eingeschlichen. Speziell habe ich mir noch die erste englische Ausgabe „The Six-Cornered Snowflake“ von 1966 angesehen, herausgegeben und übersetzt von Colin Hardie, mit Essays von B. J. Mason („On the Shapes of Snow Crystals“) und Lancelot Law Whyte („Kepler's unsolved Problem and the *Facultas Formatrix*)“. Man findet dort zwar einige Überlegungen zu „close-packing of equal spheres“ und zur Bedeutung Harriots, aber auch hier noch keine „Kepler Conjecture“.

Die „Keplersche Vermutung“ diente hier als *ein* Beispiel, um zu zeigen, wie sehr Kepler bis heute nachwirkt. Kepler ragt in einer Art und Weise unter den ohnehin vielen genialen Renaissance-Menschen heraus, weil er seine tiefgründigen Spekulationen mit höchster mathematischer Kunst verknüpfte und dabei möglichst einen experimentellen Nachweis gesehen haben wollte. Selbst einem Tycho Brahe oder Galilei fehlt da noch das eine oder andere.

Proklos, nach Kepler (Weltharmonik, in der Ausgabe von Fritz Krafft):

[13] JOHANNES KEPLER

I. BUCH DER WELTHARMONIK

Die regulären Figuren, die die harmonischen Proportionen erzeugen, ihr Ursprung, ihre Klassen, ihre Ordnung und ihre Unterschiede hinsichtlich ihrer Wißbarkeit und Darstellbarkeit

PROKLOS DIADOCHOS

in Buch I seines *Kommentars zum ersten Buch des Euklid*
[Edition G. FRIEDLEIN (1873): 22, 17–19 und 22–26]:

»Für die Betrachtung der Natur leistet die Mathematik den größten Beitrag, indem sie das wohlgeordnete Gefüge der Gedanken enthüllt, nach dem das All gebildet ist [...] und die einfachen Urelemente in ihrem ganzen harmonischen und gleichmäßigen Aufbau darlegt, mit denen auch der ganze Himmel begründet wurde, indem er in seinen einzelnen Teilen die ihm zukommenden Formen annahm.«

An erster Stelle also die Mathematik, aber vorher die Motivation, der Erkenntnisdrang, die Spekulation, danach aber die empirische Überprüfung, das Experiment. Oder gleich als geflügeltes Wort: „Es dürfen die Spekulationen a priori nicht gegen die offenkundige Erfahrung verstoßen, sie müssen vielmehr mit ihr in Übereinstimmung gebracht werden.“[7]

[7] Kepler an Herwart von Hohenburg, 12.7.1600, in Martha List: Johannes Kepler, Der Mensch und die Sterne, Aus seinen Werken und Briefen, Wiesbaden 1953, S. 29.

Die Reformation der Astronomie (und der Physik usw.) war deswegen „Keplern vorbehalten, einem in der Tat seltnen Geist, in dessen geistigem Bestreben und Weltansichten sich, wie in einem magischen Spiegel, das Wissen ganzer künftiger Jahrhunderte abbildet.“[8]

Ernst Cassirer:
„Wir sind stolz auf unsere Naturwissenschaft; aber wir sollten nicht vergessen, dass die Naturwissenschaft eine sehr späte Erungenschaft des menschlichen Geistes ist. Selbst im siebzehnten Jahrhundert, im großen Jahrhundert Galileos und Keplers, Descartes und Newtons, war sie keineswegs fest verankert. Sie mußte noch um ihren Platz an der Sonne kämpfen. In der Renaissance wogen die sogenannten okkulten Wissenschaften, Magie, Alchemie, Astrologie noch vor, ja sie hatten eine neue Blüteperiode. Kepler war der erste große empirische Astronom, der imstande war, die Bewegung der Planeten in exakten mathematischen Begriffen zu beschreiben. Doch war es äußerst schwer, diesen entscheidenden Schritt zu tun. Denn Kepler mußte nicht nur gegen seine Zeit, sondern auch gegen sich selbst kämpfen. Astronomie und Astrologie waren noch untrennbar. Kepler selbst wurde zum Astrologen am kaiserlichen Hof in Prag ernannt und wurde am Schluß seines Lebens der Astrologe Wallensteins. Der Weg, auf dem er sich endlich befreite, ist eines der wichtigsten und faszinierendsten Kapitel in der Geschichte der modernen Wissenschaft.“[9]

Die wissenschaftlich-technisch-industrielle Revolution erforderte und brachte später viele weitere „Kepler-Typen“ hervor, Naturwissenschaftler und Ingenieure, freilich mit der zunehmenden Tendenz zur Über-Spezialisierung. Auch das dürfte den Riss zwischen den „zwei Kulturen“ (Snow) beschleunigt haben.

David Hilbert, in seinem Jahrhundert-Vortrag, zumindest die Mathematik betreffend:

---

[8] Gotthilf Heinrich Schubert: Ansichten von der Nachtseite der Naturwissenschaft, Dresden 1827 (3. Auflage), S. 129.
[9] Ernst Cassirer: Der Mythus des Staates, Frankfurt am Main 1985 (1949), S. 384.

„Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissensstoffes im Einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hülfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogieen in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.
Aber – so fragen wir – wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schließlich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen? Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, daß jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hülfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorieen erleichtern und umständliche ältere Entwickelungen beseitigen und daß es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hülfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientiren als dies für irgend eine andere Wissenschaft der Fall ist.“

Also durchaus ein Grund zum Optimismus, zumal es sich herausstellt, dass alte Probleme und Methoden, die früher nur ganz wenige Experten handhaben konnten, zum selbstverständlichen Allgemeingut werden können, z.B. die Grundrechnungsarten, das indische Rechnen im Dezimalsystem.

Und dann auch Popularisierungen und Zusammenfassungen auf hohem Niveau, ich denke da z.B. an das Buch von Roger Penrose „Computerdenken. Des Kaisers neue Kleider oder Die Debatte um Künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik“ (1991).

Im Vorwort schreibt Martin Gardner:
„In den sechziger Jahren arbeitete Penrose mit seinem Freund Stephen Hawking auf dem Gebiet der Kosmologie; dabei machte er seine vielleicht bekannteste Entdeckung. Wenn die Relativitätstheorie uneingeschränkt gültig ist, muß es in jedem Schwarzen Loch eine Singularität geben, an der die Gesetze der Physik versagen.

Selbst diese Leistung hat Penrose in den letzten Jahren in den Schatten gestellt, indem er zwei Formen konstruiert hat, welche die Ebene nach Art eines Escher-Mosaiks parkettieren – und zwar in ausschließlich nicht-periodischer Weise. (Mehr über diese verblüffenden Formen kann man in meinem Buch *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* nachlesen.) Penrose erfand – oder besser entdeckte – sie, ohne im geringsten zu erwarten, daß sie zu etwas nütze sein würden. Doch wie sich zur allgemeinen Überraschung herausgestellt hat, liegen dreidimen-sionale Versionen dieser Parkettierungselemente vermutlich einer seltsamen neuen Art von Materie zugrunde. Solche ‚Quasikristalle' bilden derzeit eines der intensivsten Forschungsgebiete in der Kristallographie. Zugleich ist dies in neuerer Zeit das schlagendste Beispiel dafür, daß spielerische Mathematik zu unvorhergesehenen Anwendungen führen kann."